HOSSAM GHANEM

(28) 8.5 *Strategy For Integration*

HOSSAM GHANEM

قوانين التكامل الأساسية

$$\int \sinh t \; dt = \cosh t + C$$

$$\int \cosh t \; dt = \sinh t + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 t \, dt = \tanh t + C$$

$$\int \operatorname{sech} t \tanh t \, dt = -\operatorname{sech} t + C$$

$$\int \operatorname{csch} t \coth t \, dt = -\operatorname{csch} t + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 t \, dt = -\coth t + C$$

$$\int t^n dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{t} + C$$

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln t + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt = \sin^{-1} \frac{t}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + t^2} dt = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{t}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{t^2 - a^2}} dt = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{t}{a}$$

$$\int \sin t \; dt = -\cos t + C$$

$$\int \cos t \; dt = \sin t + C$$

$$\int \sec^2 t \; dt = \tan t + C$$

$$\int \csc^2 t \; dt = -\cot t + C$$

$$\int \sec t \tan t \; dt = \sec t + C$$

$$\int \csc t \cot t \; dt = -\csc t + C$$

$$\int \tan t \; dt = -\ln|\cos t| + C$$

$$\int \cot t \; dt = \ln|\sin t| + C$$

$$\int \sec t \; dt = \ln|\sec t + \tan t| + C$$

$$\int \csc t \; dt = \ln|\csc t - \cot t| + C$$

HOSSAM GHANEM

مسائل التكامل

دالة مضروبة في مشتقتها

حدد الدالة وحدد مشتقتها ثم
افرض أن الدالة تساوي t
ثم اشتق لتحصل على dt
أنظر مثال 1

كسر بسط ومقام مشتقة المقام تساوي البسط

أفرض أن المقام يساوي t ثم اشتق
لتحصل على dt فتكون هي البسط
انظر مثال 3

ثابت مرفوع لأس متغير مضروب في مشتقة هذا الأس

أفرض أن الأس يساوي t ثم اشتق
لتحصل على dt
انظر مثالين 5 و 6

قوس مرفوع لأس مضروب في مشتقة ما داخل القوس

افرض أن ما بداخل القوس
يساوي t
ثم اشتق لتحصل على dt
أنظر مثال 2

دالة مثلثيه مضروبة في مشتقة الزاوية

أفرض أن الزاوية تساوي t ثم اشتق
لتحصل على dt
انظر مثال 4

دالة زائدية على الصورة $\tanh(\ln x)$

إذا اجتمع الـ $\ln x$ و الـ $\tanh$
يجب استعمال التعريف
انظر مثال 7

نصف الأس

إذا الإجراءات السابقة لم تعطي حل بمعنى انك أخذت t ولم تجد dt خذ t بنصف الأس مثلا

إذا أخذت $t = x^4$

ولم تجد $dt = 4x^3\,dx$

فإختار

$t = x^2$

$dt = 2x\,dx$

مثال

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx$$

$t = 1 - x^4$

$dt = -4x^3 dx$

هنا لا يوجد بالمسألة x^3

ولذلك نأخذ نصف الأس

$t = x^2$

$\therefore\ dt = 2x\,dx$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1} t + C$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1} x^2 + C$$

Example 1

$$\int x\sin x^2\,(1+\cos x^2)dx$$

$$u = 1+\cos x^2$$

$$du = -\sin x^2\,2xdx$$

$$\frac{-1}{2}\,du = x\sin x^2\,dx$$

$$I = \int (1+\cos x^2)\cdot x\sin x^2\,dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int u\,du = \frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{2}u^2 + c$$

$$= = \frac{-1}{4}\,(1+\cos x^2)^2 + c$$

Example 2

$$\int \frac{1}{x^3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{5}{3}} dx$$

$$u = 1+\frac{1}{x^2} \qquad u = 1+x^{-2}$$

$$du = -2x^{-3}\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{x^3}\,dx$$

$$I = \int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{x^3}dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int u^{\frac{5}{3}}\,du = \frac{-1}{2}\cdot\frac{3}{8}\,u^{\frac{8}{3}} + c$$

$$= \frac{-3}{16}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{8}{3}} + c$$

Example 3

$$\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx$$

$$I = \int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx$$

$$u = e^x - e^{-x}$$

$$du = (e^x+e^{-x})dx$$

$$I = \int \frac{1}{e^x-e^{-x}}\cdot(e^x+e^{-x})dx$$

$$I = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c$$

$$I = \ln|e^x - e^{-x}| + c$$

Example 4

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$$

$$u = \sqrt[3]{x} \qquad u = x^{\frac{1}{3}}$$

$$du = \frac{1}{3}\,x^{\frac{-2}{3}}\,dx$$

$$3du = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$$

$$I = \int \sin\sqrt[3]{x}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$$

$$= 3\int \sin u\,du$$

$$= -3\,\cos\,u + c$$

$$= -3\,\cos\sqrt[3]{x} + c$$

Example 5

$$\int \frac{5^{\cot x}}{\sin^2 x}dx$$

$$u = \cot x \qquad du = -\csc^2 x\,dx$$

$$-du = \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$$

$$I = \int 5^{\cot x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}dx$$

$$= -\int 5^u\,du = -5^u\cdot\frac{1}{\ln 5} + c$$

$$= -5^{\cot x}\cdot\frac{1}{\ln 5} + c$$

Example 6

$$\int 2^{-x}6^x dx$$

$$2^{-x}\,6^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x 6^x = \left(\frac{6}{2}\right)^x = 3^x$$

$$I = \int 2^{-x}\,6^x\,dx$$

$$= \int 3^x\,dx = \frac{1}{\ln 3}\cdot 3^x + c$$

Example 7

$$II = \int x\tanh(\ln x)\,dx = \int x\frac{e^{\ln x}-e^{-\ln x}}{e^{\ln x}+e^{-\ln x}}\,dx \quad = \int x\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}\right)dx$$

$$= \int x\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)dx = \int x\left(\frac{x^2+1-2}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \int x\left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1}\right)dx = \int x\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \int x - \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}x^2 - \ln(x^2+1) + c$$

Integration by parts

التكامل يستخدم عندما يكون مطلوب تكامل حاصل ضرب دالتين (بشرط أن لا يكون أحداهما مشتقة الأخرى) مثل

$$\int xe^x\,dx \quad , \quad \int x\sin x\,dx$$

أو يكون التكامل يحتوي على دوال لا يوجد لها تكامل مثل

$$\int 2x\ \sec^{-1} x\,dx \quad , \qquad \int x(\ln x)^2\,dx$$

هناك أربع حالات للتكامل Integration by parts

الحالة الأولى

وفيها يتم إجراء التكامل مرة واحدة فقط مثال

$$I = \int x\sin x\ dx$$

$u = x \qquad\qquad dv = x\sin x\ dx$

$du = dx \qquad\qquad v = -\cos x$

$$I = uv - \int v\,du$$

$$I = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + c$$

الحالة الثانية

وفيها يتم إجراء التكامل مرتين و غالبا ما تحتوي على x^2 مثال

$$I = \int x^2 e^{2x}\,dx$$

$u = x^2 \qquad\qquad dv = e^{2x}dx$

$du = 2xdx \qquad\qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}\ e^{2x}$

$$I = uv - \int v\,du$$

$$I = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int x\,e^{2x}\,dx$$

$$I_1 = \int x\,e^{2x}$$

$u = x \qquad\qquad dv = e^{2x}\,dx$

$u = dx \qquad\qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$I_1 = \frac{1}{2}x\,e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}x\,e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c_1$$

$$I = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}x\,e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + c$$

الحالة الثالثة " Rotation "

وفيها يكون الدالتان لا ينتهيان بعدد ثابت عند الاشتقاق وفيها يتم إجراء التكامل مرتين و في المرة الثانية يظهر التكامل الأصلي مرة أخرى

$$I = \int \cosh x \sin x \; dx$$

$u = \cosh x \qquad\qquad dv = \sin x \; dx$

$du = \sinh x \; dx \qquad\qquad v = -\cos x$

$I = uv - \int v \, du$

$I = -\cosh x \cos x + \int \sinh x \cos x \; dx \qquad \rightarrow (1)$

$I_1 = \int \sinh x \cos x \; dx$

$u = \sinh x \qquad\qquad dv = \cos x \, dx$

$du = \cosh x \qquad\qquad v = \sin x \, dx$

$I_1 = \sinh x \sin x - \int \cosh x \sin x \; dx$

$I_1 = \sinh x \sin x - I \qquad \rightarrow (2)$

(2) in (1)

$I = -\cosh x \cos x + \sinh x \sin x - I$

$2\, I = \sinh x \sin x - \cosh x \cos x + c_1$

$I = \frac{1}{2} \sinh x \sin x - \frac{1}{2} \cosh x \cos x + C$

الحالة الرابعة

وفيها يكون المطلوب تكامل دوال ليست في قوانين التكامل مثل

$$\sin^{-1} x \;,\; \cos^{-1} x \;,\; \tan^{-1} x \,,\; \sec^{-1} x \;,\; \csc^{-1} x \;,\; \cot^{-1} x \;,\; \ln x$$

$I = \int \tan^{-1} x \; dx$

$u = \tan^{-1} x \qquad\qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{1+x^2} \, dx \qquad\qquad v = x$

$I = uv - \int v \, du$

$I = x \, \tan^{-1} x - \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = x \, \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = x \, \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$

Trigonometric integrals

أولا تكاملات تحتوي على $\sin x\ ,\cos x$

الحالة الأولى

تحتوي على $\sin x\ ,\cos x$ مرفوعين لأسس على الصورة $\sin^m x\ ,\cos^n x$ بحيث **أحد الأسين فردي**
نسحب واحد من النسبة ذات الأس الفردي ونحول الباقي للنسبة الأخرى

مثال :

$\int \operatorname{Sin}^3 x\ \cos^2 x\,dx$	هنا الـ $\operatorname{Sin}^3 x$ ذات أس فردي (3)	1
$\int \sin^2 x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x\,dx$	تم سحب $\sin x$ من $\operatorname{Sin}^3 x$ فتصبح $\sin^2 x$	2
$\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\ \cdot \sin x\,dx$	تم تحويل $\sin^2 x$ إلي $(1-\cos^2 x)$	3
$t=\cos x$	استخدم التعويض	4
$dt=-\sin t$ $-dt=\sin x\,dx$	ثم اشتق لتحصل على الـ dt	5
$-\int (1-t^2)t^2\ \cdot dt$	عوض في التكامل الناتج من الخطوة رقم 3	6

ملحوظات

1- إذا كان أسس الـ $\cos x\ ,\sin x$ كلاهما فردي نسحب من الأس الأقل

2 - $\sin^4 x=(\sin^2 x)^2=(1-\cos^2 x)^2$

3- هذه الطريقة تسري على التكاملات مثل $\int \cos^3 x\ dx\ ,\int \cos^4 x \sin x\ dx$ أيضا

الحالة الثانية

تحتوي على $\sin x\ ,\cos x$ مرفوعين لأسس على الصورة $\sin^m x\ ,\cos^n x$ بحيث **الأسين كلهما زوجي**
يتم حل التكامل بالاختصارات مستعين بالقوانين الآتية

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$	1
$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$	2
$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$	3
$\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x$	4
$\frac{\cos x}{\sin^2 x}=\csc x\cot x$	5
$\sin 2x=2\sin x\cos x$	6
$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ $\cos 2x=1-2\sin^2 x$	7

ثانيا تكاملات تحتوي على $\tan x$, $\sec x$

الحالة الأولى

تحتوي على $\sec x$ مرفوع لأس **زوجي** على الصورة $\tan^n x \sec^m x$ (لا يهم كون أس الـ tan زوجي أو فردي أو حتى كسر)

نسحب اثنان من الـ $\sec^m x$ و نحول الباقي إلي $\tan^2 x$ بالقانون $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

مثال :

1	هنا ا لـ $\sec^4 x$ ذات أس زوجي (4)	$\int \tan^3 x \ \sec^4 x\, dx$
2	تم سحب $\sec^2 x$ من $\sec^4 x$ فتصبح $\sec^2 x$	$\int \tan^3 x \ \sec^2 x \cdot \sec^2 x\, dx$
3	تم تحويل $\sec^2 x$ إلي $(1 + \tan^2 x)$	$\int \tan^3 x \ (1 + \tan^2 x) \cdot \sec^2 x\, dx$
4	استخدام التعويض	$t = \tan x$
5	ثم اشتق لتحصل على الـ dt	$dt = \sec^2 x\, dx$
6	عوض في التكامل الناتج من الخطوة رقم 3	$\int t^3(1 + t^2) \ \cdot dt$

ملحوظات

1- إذا كان الـ $\sec x$ مرفوعة للأس 2 خذها كلها مع dx و لا يتبقى شيئا

2 – $\sec^4 x = (\sec^2 x)^2 = (1 + \tan^2 x)^2$

3- هذه الطريقة تسري على التكاملات مثل $\int \tan^{\frac{3}{2}} x \sec^2 x \ dx$, $\int \sec^4 x \ dx$ أيضا

الحالة الثانية

تحتوي على $\tan x$ مرفوع لأس **فردي** على الصورة $\tan^n x \sec^m x$ (لا يهم كون أس الـ sec زوجي أو فردي أو حتى كسر)

نسحب واحدة من الـ$\sec x$ و واحدة من الـ $\tan x$ ونحول باقي الـ$\tan x$ إلي $\sec x$ بالقانون $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

مثال :

1	هنا ا لـ $\tan^3 x$ ذات أس فردي (3)	$\int \tan^3 x \ \sec^3 x\, dx$
2	تم سحب $\tan x \sec x$ من $\tan^3 x \ \sec^3 x$ فتصبح $\tan^2 x \ \sec^2 x$	$\int \tan^2 x \ \sec^2 x \cdot \tan x \sec x\, dx$
3	تم تحول $\tan^2 x$ إلي $(\sec^2 x - 1)$	$\int (\sec^2 x - 1) \ \sec^2 x \tan x \sec x\, dx$
4	استخدام التعويض	$t = \sec x$
5	ثم اشتق لتحصل على الـ dt	$dt = \tan x \sec x\, dx$
6	عوض في التكامل الناتج من الخطوة رقم 3	$\int (t^2 - 1)\, t^2 dt$

ملحوظات

1 – $\tan^4 x = (\tan^2 x)^2 = (\sec^2 x - 1)^2$

2- هذه الطريقة تسري على التكاملات مثل $\int \tan^3 x \sec x \ dx$ أيضا

ثالثا تكاملات تحتوي على $\cot x$, $\csc x$

الحالة الأولى

تحتوي على $\csc x$ مرفوع لأس **زوجي** على الصورة $\cot^n x \csc^m x$ (لا يهم كون أس الـ cot زوجي أو فردي أو حتى كسر)

نسحب اثنان من الـ $\csc^m x$ و نحول الباقي إلى $\cot^2 x$ بالقانون $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

مثال :

1	هنا ا لـ $\csc^4 x$ ذات أس زوجي (4)	$\int \cot^5 x \ \csc^4 x \, dx$
2	تم سحب $\sec^2 x$ من $\csc^4 x$ فتصبح $\csc^2 x$	$\int \cot^5 x \ \csc^2 x \cdot \csc^2 x \, dx$
3	تم تحويل $\csc^2 x$ إلي $(1+\cot^2 x)$	$\int \cot^5 x \ (1+\cot^2 x) \cdot \csc^2 x \, dx$
4	استخدم التعويض	$t = \cot x$
5	ثم اشتق لتحصل على الـ dt	$dt = -\csc^2 x \, dx$ $-dt = \csc^2 x \, dx$
6	عوض في التكامل الناتج من الخطوة رقم 3	$-\int t^5(1+t^2) \cdot dt$

ملحوظات

1- إذا كان الـ $\csc x$ مرفوعة للأس 2 خذها كلها مع dx و لا يتبقى شيئا

2 – $\csc^4 x = (\csc^2 x)^2 = (1+\cot^2 x)^2$

3- هذه الطريقة تسري على التكاملات مثل $\int \cot^{\frac{3}{2}} x \csc^2 x \ dx$, $\int \csc^4 x \ dx$ أيضا

الحالة الثانية

تحتوي على $\cot x$ مرفوع لأس **فردي** على الصورة $\cot^n x \csc^m x$ (لا يهم كون أس الـ csc زوجي أو فردي أو حتى كسر)

نسحب واحدة من الـ$\csc x$ و واحدة من الـ $\cot x$ ونحول باقي الـ$\cot x$ إلي $\csc x$ بالقانون $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

مثال :

1	هنا ا لـ $\cot^3 x$ ذات أس فردي (3)	$\int \cot^3 x \ \csc^{\frac{3}{2}} x \, dx$
2	تم سحب $\cot x \csc x$ من $\cot^3 x \ \csc^{\frac{3}{2}} x$ فتصبح $\cot^2 x \ \csc^{\frac{1}{2}} x$	$\int \cot^2 x \ \csc^{\frac{1}{2}} x \cdot \cot x \csc x \, dx$
3	تم تحويل $\cot^2 x$ إلي $(\csc^2 x - 1)$	$\int (\csc^2 x - 1) \ \csc^{\frac{1}{2}} x \cot x \csc x \, dx$
4	استخدم التعويض	$t = \csc x$
5	ثم اشتق لتحصل على الـ dt	$dt = -\cot x \csc x \, dx$ $-dt = \cot x \csc x \, dx$
6	عوض في التكامل الناتج من الخطوة رقم 3	$-\int (t^2-1) \ t^{\frac{1}{2}} dt$

ملحوظات

1 – $\cot^4 x = (\cot^2 x)^2 = (\csc^2 x - 1)^2$

2- هذه الطريقة تسري على التكاملات مثل $\int \cot^3 x \csc x \ dx$ أيضا

ملحوظة

اجعل التكامل يحتوي على النسب المثلثية التي تناسب بعضها البعض يعني التكامل يحتوي على $(\sin x\ ,\cos x)$ فقط أو $(\sec x\ ,\tan x)$ فقط أو $(\csc x\ ,\cot x)$ فقط
مستعينا بالقوانين الآتية

$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$	$\cos x \sec x = 1$
$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$	$\sin x \csc x = 1$
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\tan x \cot x = 1$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$	$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$
$\sin x \cot x = \cos x$	$\cos x \tan x = \sin x$
$1+\cot^2 x = \csc^2 x$	$1+\tan^2 x = \sec^2 x$

تكاملات مشهورة

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c$$

$$\int \tan^2 x\ dx = \int (\sec^2 x - 1)dx = \tan x - x$$

$$\int \cot^2 x\ dx = \int (\csc^2 x - 1)dx = -\cot x - x$$

Trigonometric Substitutions

إذا احتوى التكامل على أحد الجذور الآتية

$$\sqrt{a^2 - x^2} \quad , \quad \sqrt{a^2 + x^2} \quad , \quad \sqrt{x^2 - a^2}$$

يكون التكامل بطريقة Trigonometric Substitutions

الحالة الأولى

Expression in integrand

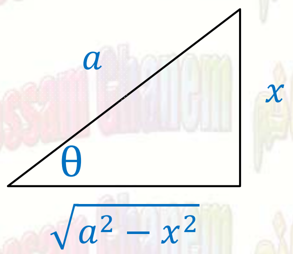
$$\sqrt{a^2 - x^2}$$

Trigonometric substitution

$$x = a\sin\theta \qquad dx = a\cos\theta \;\; d\theta$$

$$\sin\theta = \frac{x}{a}$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$



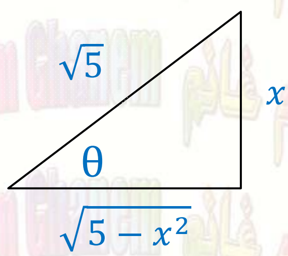
EXAMPLE

$$I = \int \frac{2}{x\sqrt{5 - x^2}}\, dx$$

$$x = \sqrt{5}\sin\theta \qquad dx = \sqrt{5}\cos\theta \;\; d\theta$$

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{5}}$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)$$



$$I = \int \frac{2}{\sqrt{5}\sin\theta\sqrt{5 - \left(\sqrt{5}\sin\theta\right)^2}}\, \sqrt{5}\cos\theta \;\; d\theta$$

$$= \int \frac{2\cos\theta}{\sin\theta\sqrt{5 - 5\sin^2\theta}} \; d\theta$$

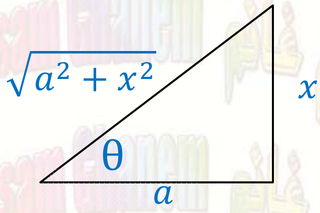
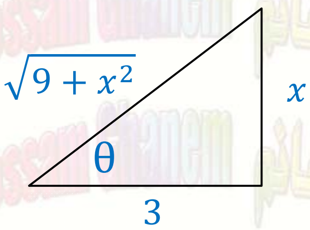
$$= \int \frac{2\cos\theta}{\sin\theta\sqrt{5}\sqrt{1 - \sin^2\theta}}\, d\theta$$

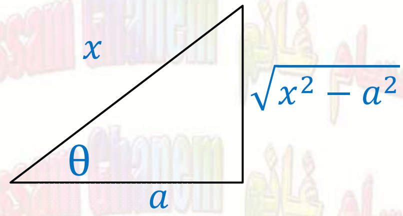
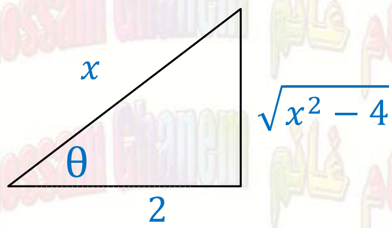
$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\int \frac{\cos\theta}{\sin\theta\sqrt{\cos^2\theta}}\, d\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}\int \frac{\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\int \csc\theta\, d\theta = \ln|\csc\theta - \cot\theta|$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}}{x} - \frac{\sqrt{5 - x^2}}{x}\right| + C$$

الحالة الثانية

Expression in integrand	$\sqrt{a^2+x^2}$ & $\sqrt{x^2+a^2}$
Trigonometric substitution	$x = a\tan\theta$ $\quad$ $dx = a\sec^2\theta \; d\theta$ $\tan\theta = \dfrac{x}{a}$ $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ 
EXAMPLE	$I = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$ $x = 3\tan\theta$ $\quad$ $dx = 3\sec^2\theta \; d\theta$ $\tan\theta = \dfrac{x}{3}$ $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{3}\right)$  $I = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9+(3\tan\theta)^2}}\,3\sec^2\theta \; d\theta$ $= \displaystyle\int \frac{3\sec^2\theta}{\sqrt{9+9\tan^2\theta}}\,d\theta = \int \frac{3\sec^2\theta}{3\sqrt{1+\tan^2\theta}}\,d\theta$ $= \displaystyle\int \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}}\,d\theta = \int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}\,d\theta = \int \sec\theta\,d\theta$ $= \ln\lvert\sec\theta + \tan\theta\rvert + C$ $= \ln\left\lvert \dfrac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \dfrac{x}{3} \right\rvert + C$

<table>
<tr><td>Expression in integrand</td><td>$\sqrt{x^2 - a^2}$</td></tr>
<tr><td>Trigonometric substitution</td><td>$x = a\sec\theta \qquad dx = a\sec\theta\tan\theta \ \ d\theta$
$\sec\theta = \frac{x}{a}$
$\theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

</td></tr>
<tr><td>EXAMPLE</td><td>$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}\,dx$
$x = 2\sec\theta \qquad dx = 2\sec\theta\tan\theta \ \ d\theta$
$\sec\theta = \frac{x}{2}$
$\theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$


$I = \int \frac{1}{\sqrt{(2\sec\theta)^2 - 4}}\, 2\sec\theta\tan\theta \ \ d\theta$
$= \int \frac{2\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta - 4}}\ d\theta$
$= \int \frac{2\sec\theta\tan\theta}{2\sqrt{\sec^2\theta - 1}}\ d\theta = \int \frac{2\sec\theta\tan\theta}{2\sqrt{\tan^2\theta}}\ d\theta$
$= \int \frac{2\sec\theta\tan\theta}{2\tan x}\ d\theta = \int \sec\theta\, d\theta$
$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$
$= \ln\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}\right| + C$</td></tr>
</table>

Quadratic Expressions

كيف تحول المقدار الثلاثي إلي مربع كامل		
x^2-6x-7	الحالة الأولى : x^2 موجبة	
$(x^2-6x\quad)-7$	ضع $x^2,-6x$ في قوس مع ترك فراغ في القوس كما هو مبين	1
$(x^2-6x+9)-7$	اقسم معامل x على 2 ثم ربع الناتج وضعه في الفراغ	2
$(x^2-6x+9)-7-9$	ضع نفس العدد بإشارة سالب خارج القوس	3
$(x-3)^2-16$	حلل القوس مربع كامل " جذر الأول ثم إشارة الأوسط ثم جذر الأخير الكل تربيع" ثم اجمع العددين خارج القوس	4

كيف تحول المقدار الثلاثي إلي مربع كامل		
$9-8x-x^2$	الحالة الثانية : x^2 سالبة	
$9\quad-(x^2-8x\quad)$	ضع العدد أولا ثم أترك مسافة وخذ إشارة سالب ثم افتح قوس وضع $x^2,-8x$ في قوس بإشارة مخالفة مع ترك فراغ في القوس كما هو مبين	1
$9\quad-(x^2-8x+16)$	اقسم معامل x على 2 ثم ربع الناتج وضعه في الفراغ	2
$9+16-(x^2-8x+16)$	ضع نفس العدد بإشارة موجب خارج القوس	3
$25-(x-4)^2$	اجمع العددين خارج القوس ثم حلل القوس مربع كامل " جذر الأول ثم إشارة الأوسط ثم جذر الأخير الكل تربيع"	4

كيف تحل مسألة Quadratic Expressions		
$I=\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}dx$	نلاحظ في هذه المسألة وجود x^2,x تحت الجذر ولذلك نكمل المربع	1
$x^2-4x+3=$ $(x^2-4x+4)+3-4=$ $(x-2)^2-1$	كمل المربع كما سبق في الجدول الأول	2
$I=\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{(x-2)^2-1}}dx$	فيصبح التكامل	3
$x-2=t$	استخدم التعويض	4
$dx=dt$	اشتق لتحصل على dt	5
$I=\int \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}dx=\sec^{-1}t+c$	يصبح التكامل	6
$I=\sec^{-1}(x-2)+c$	عوض عن t مرة أخرى	7

Integrals of Rational Function

القسمة المطولة

كيف تقسم قسمة مطولة		
$\dfrac{x^3-3x+6}{x-2}$		
$x-2\overline{)\,x^3 \qquad -3x+6}$	الترتيب ضع الحدود بترتيب تنازلي من حيث الأس و اترك فراغ للأس الغائب " لا يوجد x^2 فتركنا فراغ مكان الـ x^2"	1
x^2 $x-2\overline{)\,x^3 \qquad -3x+6}$	قسمة قسمة الأول على الأول فقط " يعني $x \div x^3$ فقط" وضع الناتج فوق	2
x^2 $x-2\overline{)\,x^3 \qquad -3x+6}$ $\underline{x^3-2x^2}$	ضرب أضرب ناتج القسمة في المقسوم علية وضع ناتج الضرب أسفل المقسوم	3
x^2 $x-2\overline{)\,x^3 \qquad -3x+6}$ $\underline{\overset{-}{}x^3\overset{+}{-}2x^2}$	تغير أشارات غير إشارات ناتج الضرب " الموجب يصير سالب و العكس "	4
x^2 $x-2\overline{)\,x^3 \qquad -3x+6}$ $\underline{\overset{-}{}x^3\overset{+}{-}2x^2}$ $0+2x^2-3x+6$	الجمع اجمع واضعا في اعتبارك الإشارات الجديدة	5
x^2+2x+1 $x-2\overline{)\,x^3 \qquad -3x+6}$ $\underline{\overset{-}{}x^3\overset{+}{-}2x^2}$ $0+2x^2-3x+6$ $\underline{\overset{-}{}2x^2\overset{+}{-}4x}$ $0 \;+\; x+6$ $\underline{x\overset{+}{-}2}$ 8	تكرار كرر الخطوات من 1 إلي 5 حتى يصبح درجة ناتج الجمع أقل من درجة المقسوم علية	6
$\dfrac{x^3-3x+6}{x-2}=x^2+2x+1+\dfrac{8}{x-2}$		

HOSSAM GHANEM

PARTIAL FRACTION

RATIONAL FUNCTION	PARTIAL FRACTION
$\dfrac{2x}{(x+2)(x-5)}$	$\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x-5}$
$\dfrac{3x^2-1}{(x-7)(x+3)^2}$	$\dfrac{A}{x-7}+\dfrac{B}{x+3}+\dfrac{C}{(x+3)^2}$
$\dfrac{x-1}{(x+4)(x^2+5)}$	$\dfrac{A}{x+4}+\dfrac{Bx+C}{x^2+5}$
$\dfrac{x+2}{(x-1)^2(x^2+7)}$	$\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+7}$

HOSSAM GHANEM

يجب أن يكون درجة البسط أقل من درجة المقام وإذا لم يكن كذلك أستخدم طريقة القسمة المطولة

Rational Function
كسر بسط ومقام

المقام لا يمكن تحليله

$b^2 - 4ac < 0$

استخدم طريقة إكمال المربع

$$\int \frac{1}{x^2 - 6x + 10} dx$$

$$= \int \frac{1}{(x-3)^2 + 1} dx$$

$$= \tan^{-1}(x-3) + c$$

المقام يمكن تحليله

استخدم طريقة

Partial Fraction

البسط = مشتقة المقام

يكون التكامل يساوي | المقام|ln

$$\int \frac{\sec^2 x}{1 + \tan x} dx$$

$$= \ln|1 + \tan x| + c$$

HOSSAM GHANEM

الجذور العليا

The high Roots

$$\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}\,(x - \sqrt[3]{x})}\,dx$$

في هذه المسألة يوجد أكثر من جذر " الجذر السادس و الجذر الثالث و الجذر الثاني " وطريقة حله كالتالي

	الخطوات	EXAMPLE
1	نختار أكبر جذر في المسألة ونحدد دليل الجذر	6
2	نفرض أن $x = u^{(\text{العدد الذي اخترناه في الخطوة الأولى})}$	
3	نوجد الجذر الثاني لـ x يعني نقسم أس الـ u على 2	
4	نوجد الجذر السادس لـ x يعني نقسم أس الـ u على 6	
5	نوجد الجذر الثالث لـ x يعني نقسم أس الـ u على 3	
6	نشتق المعادلة في الخطوة 2 لنحصل على dx	
7	نعوض بكل ما سبق " الخطوات من 6:2 " في المسألة الأصلية	$\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}\,(x - \sqrt[3]{x})}\,dx = \int \frac{u^3 - u}{u^3(u^6 - u^2)}\,6u^5\,du$
8	اختصر	
8	ينتج من التعويض و الاختصار كسر بسط و مقام يخضع لحالة من الثلاث حالات	

HOSSAM GHANEM